$\Rightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8i}(2i\sin 3x - 6i\sin x)$ d'où $\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

b) Soit $n \geq 1$, $V_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^3(\frac{k}{n^2}) = \sum_{k=1}^{n} (-\frac{1}{4}\sin(\frac{3k}{n^2}) + \frac{3}{4}\sin(\frac{k}{n^2}))$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{3k}{n^2}) + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2}) = -\frac{1}{4}U_n(3) + \frac{3}{4}U_n(1)$$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n(3) = \frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(1) = \frac{1}{2}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\frac{1}{2}\times\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = 0$.

Conclusion : (V_n) est une suite convergente vers 0.

Solution 13 :

1°/ $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k!} - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k!} = 2^{-(n+1)!} > 0$

d'où (U_n) est une suite croissante.

2°/ a) $k! = k(k-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1 = k(k-1)!$

on a : $(k-1)! \geq 1$ d'où $k(k-1)! \geq k$ et par suite $\forall k \geq 1$ on a : $k! \geq k$.

b) Soit la suite $V_n = 2^n$.

(V_n) est une suite croissante car $V_{n+1} - V_n > 0$.

$k! \geq k \Rightarrow V_{k!} \geq V_k \Rightarrow 2^{k!} \geq 2^k$ d'où $2^{-k!} \leq 2^{-k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 2^{-k!} \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$

$$\Rightarrow U_n \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On a : $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $U_n \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3°/ On a : $-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ d'où $\forall n \geq 1$, $U_n < 1$.

(U_n) est une suite croissante, majorée par 1 donc (U_n) converge vers l .